

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Чисельні методи лінійної алгебри

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень _____

галузь знань 11– Математика та статистика _____

спеціальність 113 – Прикладна математика _____

освітня програма «Прикладна математика» _____

спеціалізація _____

вид дисципліни _____ за вибором _____

факультет _____ математики і інформатики _____

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: *Ігнатович Світлана Юрійвна*, доктор фіз.-мат. наук, доцент, професор закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Чисельні методи лінійної алгебри» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 – Прикладна математика

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є надання майбутнім спеціалістам теоретичних знань та практичних навичок з наближеного розв'язання задач лінійної алгебри.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

1. Ознайомлення з методами розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Ознайомлення з методами пошуку власних значень і власних векторів матриць.
3. Ознайомлення зі способами оцінки коректності і ефективності методу.
4. Застосування мови Python для розв'язання практичних задач: розв'язання систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів матриць.

1.3. Кількість кредитів 4

1.4. Загальна кількість годин 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
4-й	
Лекції	
32 год.	.
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	.
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	.
в тому числі: індивідуальне завдання	

1.6. Заплановані результати навчання

Знати :

1. Методи точного і наближеного розв'язання систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів матриць.
2. Основи роботи з бібліотеками NumPy, SciPy.

Вміти:

1. Застосувати чисельний метод для знаходження розв'язку заданої систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів заданої матриці, довести збіжність, оцінити похибку, оцінити обчислювальну складність.
2. Написати програму мовою Python, яка реалізує запропонований алгоритм.

2. Тематичний план навчальної дисципліни.

Розділ 1. Системи лінійних рівнянь

Тема 1. Прямі методи.

Метод Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь (без вибору і з вибором головного елемента), його обчислювальна складність. Число обумовленості матриці і його зв'язок з втратою точності при застосуванні методу Гауса. Знаходження оберненої матриці, рангу матриці, визначника. LU-розклад. Метод прогонки.

Тема 2. Похибки, їх накопичення.

Поняття та властивості похибки. Нев'язка. Наближена оцінка похибки. Точні і наближені значення. Формат запису чисел: цілі числа, числа з фіксованою та рухомою комою. Стандарт IEEE-754. Втрата точності при використанні чисел, записаних у форматі з рухомою комою.

Тема 3. Ітераційні методи.

Метод Якобі розв'язання системи лінійних рівнянь. Діагональне переважання. Метод Гауса-Зейделя. Швидкість збіжності методів. Порівняння ітераційних і прямих методів при розв'язанні прикладних задач.

Тема 4. Бібліотеки наукових обчислень NumPy і SciPy.

Масиви ndarray, їх створення, особливості і використання (застосування фільтрів, змінення форми, особливості копіювання, багатовимірні масиви, операції над масивами, використання масивів для візуалізації). Модуль Timeit, визначення часу виконання фрагментів програми.

Тема 5. Варіаційні методи

Симетричні додатно визначені матриці, варіаційні методи: мінімальних нев'язок, найшвидшого спуску, спряжених градієнтів.

Розділ 2. Власні значення і власні вектори

Тема 6. Характеристичний поліном і локалізація спектра.

Локалізація спектра матриці, круги Гершгоріна. Слід матриці, метод Левер'є-Фаддеева знаходження характеристичного полінома.

Тема 7. Методи розв'язання часткової проблеми власних значень.

Степеневий метод знаходження максимального за модулем власного значення, Степеневий метод зі зсувами, обернений степеневий метод. Приклад застосування: ранжування сторінок web.

Тема 8. QR-розклад матриці

Ортогоналізація Грама-Шмідта. QR-розклад матриці, його побудова за допомогою ортогоналізації Грама-Шмідта. Метод Хаусхолдера, побудова QR-розкладу методом Хаусхолдера. Використання QR-розкладу для розв'язання систем лінійних рівнянь.

Тема 9. Методи розв'язання повної проблеми власних значень.

QR-алгоритм розв'язання повної проблеми власних значень. Зведення матриці до форми Хесенберга методом Хаусхолдера і застосування її в QR-алгоритмі. Метод бісекцій знаходження власних значень тридіагональної симетричної матриці.

Тема 10. Перевизначені системи лінійних рівнянь.

Перевизначені системи, знаходження прийняттого (псевдо-)розв'язку методом найменших квадратів, приклади використання.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Системи лінійних рівнянь						
Тема 1. Прямі методи	12	4	4			4
Тема 2. Похибки, їх накопичення	8	2	2			4
Тема 3. Ітераційні методи	10	2	2			6
Тема 4. Бібліотеки наукових обчислень NumPy і Scipy	14	4	4			6
Тема 5. Варіаційні методи	10	2	2			6
Разом за розділом 1	54	14	14			26
Розділ 2. Власні значення і власні вектори						
Тема 5. Характеристичний поліном і локалізація спектра	14	4	4			6
Тема 6. Методи розв'язання часткової проблеми власних значень	14	4	4			6
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
Тема 8. QR-розклад матриці	12	4	2			6
Тема 9. Методи розв'язання повної проблеми власних значень	16	4	4			8
Тема 10. Перевизначені системи лінійних рівнянь	8	2	2			4
Разом за розділом 2	66	18	18			30
Усього годин	120	32	32			56

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Метод Гауса, розрахункові формули. Знаходження оберненої матриці, рангу матриці, визначника.	2
2	LU-розклад. Метод прогонки.	2
3	Числа з рухомою комою, стандарт IEEE-754. Втрата точності при розрахунках.	2

4	Методи Якобі, Гауса-Зейделя.	2
5	Бібліотеки NumPy і SciPy, їх використання для операцій з матрицями і векторами. Модуль Timeit.	4
6	Методи мінімальних нев'язок, найшвидшого спуску, спряжених градієнтів для симетричних додатно визначених матриць.	2
7	Круги Гершгорина.	2
8	Метод Левер'є-Фаддєєва.	2
9	Степеневий метод знаходження максимального за модулем власного значення.	2
10	Задача ранжування сторінок web.	2
11	<i>Контрольна робота</i>	2
12	Ортогоналізація Грама-Шмідта, метод Хаусхолдера.	2
13	QR-алгоритм. Зведення матриці до форми Хесенберга методом Хаусхолдера.	2
14	Метод бісекцій знаходження власних значень тридіагональної симетричної матриці.	2
15	Метод найменших квадратів.	2
Разом		32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашніх завдань за темами розділу 1	26
2	Виконання домашніх завдань за темами розділу 2	30
	Разом	56

6. Індивідуальне завдання

Не передбачене.

7. Методи навчання

Методи навчання: частково-пошуковий, пояснювально-ілюстративний. Студенти опановують значну частину теоретичного матеріалу шляхом самостійного написання комп'ютерних програм.

8. Методи контролю

1. Перевірка виконання домашніх завдань
2. Поточне опитування
3. Перевірка контрольної роботи
4. Перевірка екзаменаційної роботи

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота				Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота	Сума		
25	25	10	60	40	100

Мінімальна кількість балів з навчальної дисципліни, яку здобувач вищої освіти повинен набрати під час поточного контролю, самостійної роботи для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену), не передбачена програмою.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота: для матриці 4x4 (а) локалізувати спектр методом кругів Гершгоріна, (б) застосувати степеневий метод і його модифікації для знаходження її власних значень. Для розрахунків використати Python.

Максимальна оцінка за контрольну роботу – 10 балів.

Пункт (а) оцінюється в 0-3 бали, пункт (б) оцінюється у 0-7 балів у залежності від повноти і правильності виконання.

Екзамен. Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань і задачі. Список теоретичних питань надається студентам заздалегідь, але формулювання питань у білеті необов'язково дослівно збігається з формулюванням у переліку питань для підготовки до екзамену: питання в білеті може бути більш конкретним. До кожного питання слід навести конкретні приклади з обов'язковими поясненнями.

Максимальна оцінка за кожне теоретичне питання – 13 балів.

- Надане повне пояснення щодо питання, наведені приклади – 13 балів.
- Пояснення часткові, відповідь містить одну-дві несуттєві помилки – 10-12 балів.
- Відповідь містить суттєві помилки, але є частково правильною – 5-9 балів.
- Наведені лише приклади або окремі міркування – 3-4 балів.
- Роботу лише розпочато – 1-2 бали.

Задача включає два пункти, за кожний з яких виставляється 7 балів.

- Надана повна правильна відповідь – 7 балів.
- Пояснення часткові, відповідь містить одну-дві несуттєві помилки – 5-6 балів.
- Відповідь містить суттєві помилки, але є частково правильною – 2-4 балів.
- Роботу лише розпочато – 1 бал.

У разі виявлення академічної недоброчесності в роботі (списування) бал знижується; якщо робота списана, то виставляється 0 балів.

Шкала оцінювання: чотирирівнева

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. С. Шахно. Чисельні методи лінійної алгебри. Львів, 2006.
2. С. М. Шахно, А. Т. Дудикевич, С. М. Левицька. Практикум з чисельних методів. Львів, 2009.
3. І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк. Чисельні методи. Розв'язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум. Київ, 2018.

Допоміжна література

1. A. Greenbaum, T. Chartier. Numerical methods.
2. W. Ford, Numerical Linear Algebra with Applications, 2015

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. SciPy Lecture Notes, 2017: <https://scipy-lectures.org/>
2. www.python.org
3. <http://www.pythontutor.com>